第６講　複素数

6 ［A］ 次の各問いに答えよ．

(1) α，β を複素数とする．α の共役複素数を $\overline{\alpha}$ と表すとき，$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$，$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$ であることを示せ．また，α が実数であるための必要十分条件が $\alpha=\overline{\alpha}$ であることを示せ．

(2) 実数係数の 3 次方程式 $az^3+bz^2+cz+d=0$ が複素数 α を解にもつとき $\overline{\alpha}$ も解となることを示せ．

［B］ $\omega=\dfrac{4+3i}{5}$ とする．複素数列 $\{\alpha_n\}$ を

$$\alpha_{n+1}=\omega\alpha_n+(1-\omega)i,\quad \alpha_0=0$$

で定めることとする．O(0)，A(α_1)，B(α_2)，C(α_3) とおくとき，四角形 OABC の面積を求めよ．

第６講　複素数

6　［A］　次の各問いに答えよ．

(1)　α，β を複素数とする．α の共役複素数を $\overline{\alpha}$ と表すとき，$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$，$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$ であることを示せ．また，α が実数であるための必要十分条件が $\alpha=\overline{\alpha}$ であることを示せ．

(2)　実数係数の 3 次方程式 $az^3+bz^2+cz+d=0$ が複素数 α を解にもつとき $\overline{\alpha}$ も解となることを示せ．

［B］　$\omega=\dfrac{4+3i}{5}$ とする．複素数列 $\{\alpha_n\}$ を

$$\alpha_{n+1}=\omega\alpha_n+(1-\omega)i,\quad \alpha_0=0$$

で定めることとする．O(0)，A(α_1)，B(α_2)，C(α_3) とおくとき，四角形 OABC の面積を求めよ．

【答】　［A］(1)　略　　(2)　略　　［B］　$\dfrac{54}{125}$

【解説】　［A］(1)　実数 a，b，c，d を用いて $\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$ と表す．このとき

$$\begin{aligned}\overline{\alpha+\beta}-(\overline{\alpha}+\overline{\beta}) &= \overline{(a+c)+(b+d)i}-(\overline{a+bi}+\overline{c+di})\\ &= (a+c)-(b+d)i-(a-bi+c-di)=0\\ \overline{\alpha\beta}-\overline{\alpha}\,\overline{\beta} &= \overline{(a+bi)(c+di)}-\overline{a+bi}\;\overline{c+di}\\ &= \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}-(a-bi)(c-di)\\ &= (ac-bd)-(ad+bc)i-\{(ac-bd)-(ad+bc)i\}=0\end{aligned}$$

より $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$，$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$ が示された．

また $\alpha=a+bi$ において，α が実数のとき $b=0$ なので $\alpha=a+0i$ となり $\overline{\alpha}=a-0i$ より $\alpha=\overline{\alpha}$．

逆に $\alpha=\overline{\alpha}$ のとき，$a+bi=a-bi \iff 2bi=0$ より $b=0$ つまり α は実数となる．

よって $\alpha=\overline{\alpha}$ は α が実数であるための必要十分条件である．

(2)　α が解であることより

$$\begin{aligned}a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0 &\iff \overline{a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d}=\overline{0}\\ &\iff \overline{a}\,\overline{\alpha}^3+\overline{b}\,\overline{\alpha}^2+\overline{c}\,\overline{\alpha}+\overline{d}=\overline{0}\end{aligned}$$

ここで a，b，c，d，0 は実数より $\overline{a}=a$，$\overline{b}=b$，$\overline{c}=c$，$\overline{d}=d$，$\overline{0}=0$ なので $a\overline{\alpha}^3+b\overline{\alpha}^2+c\overline{\alpha}+d=0$ つまり $\overline{\alpha}$ も解となることが示された．

［B］　$\alpha_{n+1}=\omega\alpha_n+(1-\omega)i \iff \alpha_{n+1}-i=\omega(\alpha_n-i)$ であり，この式と $\alpha_0=0$ より帰納的に $\alpha_n\neq i$ なので，D(i)，$\arg\omega=\theta$ とおくと

$$\mathrm{DO}=\mathrm{DA}=\mathrm{DB}=\mathrm{DC}=1,\quad \angle\mathrm{ODA}=\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{BDC}=\theta$$

であることがわかる．

ここで $\omega=\dfrac{4+3i}{5}$ より $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ なので，$\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ つまり $\dfrac{\pi}{2}<3\theta<\dfrac{3}{4}\pi$ となることより求める面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin\theta\times 3-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin 3\theta &= \frac{1}{2}(3\sin\theta-\sin 3\theta)\\ &= 2\sin^3\theta\\ &= 2\left(\frac{3}{5}\right)^3\\ &= \frac{54}{125}\end{aligned}$$